Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

خوارزميات رونج كوتا من رتب عليا

Rung-Kutta algorithms of high stages

زينب علي الشقماني

قسم الرياضيات–كلية التربية– جامعة مصراتة

Zieneb77@gmail.com

سمية رجب ارفيدة

قسم الرياضيات–كلية التربية– جامعة مصراتة

rajabsoma@gmail.com

الملخص:

خوارزميات رونج–كوتا تلعب دورا كبيرا في حل العديد من المعادلات التفاضلية الجزئية التي يصعب حلها تحليليا، حيث أنه يوجد عدد لا نهائي من خوارزميات رونج–كوتا، ابتداءً من المرحلة الثانية، وذلك حسب قيمة الوسيط، ولا يمكن الحكم على أي من هذه الخوارزميات التي من نفس المرحلة أنها أفضل من غيرها عند حل مسألة ما؛ لأن ذلك يعتمد على طبيعة المعادلة التفاضلية، وكذلك طول الخطوة يؤثر في دقة الحل ومرحلة الطريقة.

في هذا العمل سوف نشتق خوارزميات رونج–كوتا ذات المراحل العليا، وهي خوارزميات رونج–كوتا من المرحلة الخامسة والسادسة والسابعة.

الكلمات المفتاحية: اشتقاق خوارزميات رونج–كوتا ذات المراحل العليا، الحل العددي باستخدام خوارزميات رونج– كوتا.

Abstract:

Rung-Kutta algorithms played an important role for solving some types of the partial differential equations that are hard to get their solution analytically. It was found that there is an infinite number of Rung-Kutta algorithms starting from stage two according to the values of the parameters. It is not possible to decide which of these algorithms of the same stage is better than others when solving a certain problem, because it depends on the differential equation itself, the step chosen also affects the solution. In this work, we drive Rung-Kutta algorithms of high stages, which is Rung-Kutta algorithms from stage five to seven.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

1. المقدمة:

تتلخص خوارزميات رونج–كوتا في تقريب منحنى الحل بخطوط مستقيمة ، و حساب ميل منحنى الحل عند النقاط x_n و x_{n+1} ، أو نقط أخرى بينهما ثم حساب متوسطها الموزون، ويكون هذا المتوسط هو ميل المنحنى الذي به تتحدد قيمة $y(x_{n+1})$.

وحيث إنه قد تم اشتقاق خوارزميات رونج–كوتا من المرحلة الى الأولي الى المرحلة الرابعة في عمل سابق [3] لذا سوف نبدأ باشتقاق خوارزمية رونج–كوتا من المرحلة الخامسة الى المرحلة السابعة، وإعطاء بعض الأمثلة التوضيحية لكل طريقة.

2. اشتقاق خوارزميات رونج – كوتا

2.2 خوارزمية رونج – كوتا من المرحلة الخامسة

خوارزمية رونج – كوتا من الرتبة الخامسة تعرف كالآتي:

$$y_{n+1} = y_n + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4 + a_5k_5)$$

(1)

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_1h\ ,\ y_nB_1hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_2h\ ,\ y_n + B_2hk_1 + B_3hk_3)$$

$$k_4 = f(x_n + c_3h\ ,\ y_n + B_4hk_1 + B_5hk_2 + B_6hk_3)$$

$$k_5 = f(x_n + c_4h\ ,\ y_n + B_7hk_1 + B_8hk_2 + B_9hk_3 + B_{10}hk_4)$$

من متسلسلة تايلور:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \frac{h^4}{24} y^{(4)} + \frac{h^5}{120} y^{(5)} + O(h^6)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f' + \frac{h^3}{6} f'' + \frac{h^4}{24} f''' + \frac{h^5}{120} f^{(4)} + O(h^6)$$

$$f' = f_x + ff_y$$

$$f'' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2$$

$$\begin{aligned} f''' = {} & f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^3 f_{yyy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 4f_{yy} f_y f^2 \\ & + 3f_{yy} f_x f + f_y f_{xx} + f_x f_y^2 + f_y^3 f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)} = {} & f_{xxxx} + 4f_{xxxy} f + 6f^2 f_{xxyy} + 4f^3 f_{xyyy} + f^4 f_{yyyy} + 12ff_x f_{xyy} + 6f_x f_{xxy} \\ & + 15f^2 f_x f_y f_{yy} + 9ff_y f_{xxy} + 12f_{xy} f_{yy} + 9f_y^2 f_{xy} + 7f^3 f_y f_{yyy} + 9ff_{xy}^2 + 6f^2 f_x f_{yyy} \\ & + 4f_{xy} f_{xx} + 6f_x f_y f_{xy} + 13ff_y f_x f_{yy} + 4ff_{xx} f_{yy} + 11f_y^2 f^2 f_{yy} + f_x f_y^3 + ff_y^4 \\ & + f_y^2 f_{xx} + f_y f_{xxx} + 3f_{yy} f_{xx} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y_{n+1} = {} & y_n + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2) + \\ & + \frac{h^4}{24}\Big(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^3 f_{yyy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 4f_{yy} f_y f^2 \\ & + 3f_{yy} f_x f + f_y f_{xx} + f_x f_y^2 + f_y^3 f\Big) + \frac{h^5}{120}\Big(f_{xxxx} + 4f_{xxxy} f + 6f^2 f_{xxyy} + 4f^3 f_{xyyy} \\ & + f^4 f_{yyyy} + 12ff_x f_{xyy} + 6f_x f_{xxy} + 15f^2 f_x f_y f_{yy} + 9ff_y f_{xxy} + 12f_{xy} f_{yy} + 9ff_y^2 f_{xy} \\ & + 7f^3 f_y f_{yyy} + 8ff_{xy}^2 + 6f^2 f_x f_{yyy} + 4f_{xy} f_{xx} + 6f_x f_y f_{xy} + 13ff_y f_x f_{yy} + 7ff_{xx} f_{yy} \\ & + 11f_y^2 f^2 f_{yy} + f_x f_y^3 + ff_y^4 + f_y^2 f_{xx} + f_y f_{xxx}\Big) + O(h^6) \qquad (2) \end{aligned}$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

بالتعبير عن k_2 ، k_3 ، k_4 ، k_5 بمفكوك تايلور مع إهمال الحدود التي تكون فيها قوى h أكبر من 4، وبالتعويض عنها في المعادلة (1) ثم مقارنتها بالمعادلة (2) يتم الحصول على منظومة المعادلات التالية:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$$

$$a_2c_1 + a_3c_2 + a_4c_3 + a_5c_4 = \frac{1}{2}$$

$$a_2c_1^2 + a_3c_2^2 + a_4c_3^2 + a_5c_4^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2c_1^3 + a_3c_2^3 + a_4c_3^3 + a_5c_4^3 = \frac{1}{4}$$

$$a_2c_1^4 + a_3c_2^4 + a_4c_3^4 + a_5c_4^4 = \frac{1}{5}$$

$$a_3c_1B_3 + a_4c_2B_6 + a_4c_1B_5 + a_5(c_1B_8 + c_2B_9 + c_3B_{10}) = \frac{1}{6}$$

$$a_3c_1c_2B_3 + a_4c_3(c_1B_5 + c_2B_6) + a_5c_4(c_1B_8 + c_2B_9 + c_3B_{10}) = \frac{1}{8}$$

$$a_3c_1^2B_3 + a_4(c_1^2B_5 + c_2^2B_6) + a_5(c_1^2B_8 + c_2^2B_9 + c_3^2B_{10}) = \frac{1}{12}$$

$$a_4c_1B_3B_6 + a_5c_2B_6B_{10} = \frac{1}{24}$$

$$a_3c_2^2c_1B_3 + a_4c_3^2(c_1B_5 + c_2B_6) + a_5c_4^2(c_1B_8 + c_2B_9 + c_3B_{10}) = \frac{1}{10}$$

$$a_3c_1^2c_2B_3 + a_4c_3(c_1^2B_5 + c_2^2B_6) + a_5c_4(c_1^2B_5 + c_2^2B_9 + c_3^2B_{10}) = \frac{1}{10}$$

$$a_4c_1c_3B_3 + a_5c_1c_4B_3B_9 + a_5c_4B_{10}(c_1B_5 + c_2B_6) = \frac{1}{30}$$

$$a_3(c_1B_3)^2 + a_4(c_1B_5 + c_2B_6)^2 + a_5(c_1B_8 + c_2B_9 + c_3B_{10}) = \frac{1}{20}$$

$$a_3B_3c_1^3+a_4(c_1^3B_5+c_2^3B_6)+a_5(c_1^3B_8+c_2^3B_9+c_3^3B_{10})=\frac{1}{20}$$

$$a_4c_1c_2B_3B_6+a_5(c_1c_2B_3B_9+c_1c_3B_5B_{10}+c_3c_2B_6B_{10})=\frac{1}{40}$$

$$a_4c_1^2B_3B_6+a_5(c_1^2B_3B_9+c_1^2B_5B_{10}+c_2^2B_6B_{10})=\frac{1}{60}$$

$$c_1=B_1$$

$$c_2=B_2+B_3$$

$$c_3=B_4+B_5+B_6$$

$$c_4=B_7+B_8+B_9+B_{10}$$

$$a_5c_1B_3B_6B_{10}=\frac{1}{120}$$

وهو نظام إحدى وعشرون معادلة وتسعة عشر مجهولاً له عدد لا نهائي من الحلول.

وفيما يلي صيغتان مختلفتان لخوارزمية رونج –كوتا من المرحلة الخامسة معطاة في صورة صف بوتشر[6].

1.

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & & \\
1/3 & 1/6 & 1/6 & & & \\
1/2 & 1/8 & 0 & 3/8 & & \\
1 & 1/2 & 0 & -3/2 & 2 & \\
\hline
 & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6
\end{array}$$

.2

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & & \\
1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}
\end{array}$$

ولتوضيح نتائج الحل باستخدام خوارزمية رونج –كوتا من المرحلة الخامسة وكذلك مدى تأثير طول الخطوة h على دقة الحل ندرس المثال التالي.

مثال 1

استخدم خوارزمية رونج –كوتا من المرحلة الخامسة لحل المسألة:

$$y' = e^{2x} + y - 1 \quad ; \quad y(0) = 2$$

حيث $h = 0.2\,, 0.1\,, 0.05$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

الحل:

النتائج باستخدام خوارزمية رونج –كوتا من المرحلة الخامسة تتضح في الجدول (1)

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
		$h = 0.2$	
*2.000000*E-01	2.491818	2.491825	6.198883E-06
*4.000000*E-01	3.225585	3.225541	4.434586E-05
*6.000000*E-01	4.320249	4.320117	1.316071E-04
*8.000000*E-01	5.953310	5.953032	2.770424E-04
1.000000	8.389567	8.389056	5.111694E-04
		$h = 0.1$	
*1.000000*E-01	2.221403	2.221403	0.000000E+00
*2.000000*E-01	2.491827	2.491825	2.861023E-06
*3.000000*E-01	2.822126	2.822119	6.914139E-06
*4.000000*E-01	3.225553	3.225541	1.192093E-05
*5.000000*E-01	3.718300	3.718282	1.835823E-05
*6.000000*E-01	4.320144	4.320117	2.670288E-05
*7.000000*E-01	5.055237	5.055201	3.671646E-05
*8.000001*E-01	5.953084	5.953033	5.054474E-05
*9.000001*E-01	7.049716	7.049649	6.723404E-05
1.000000	8.389146	8.389058	8.773804E-05
		$h = 0.05$	
*5.000000*E-02	2.105171	2.105171	0.000000E+00
*1.000000*E-01	2.221403	2.221403	2.384186E-07
*1.500000*E-01	2.349859	2.349859	2.384186E-07
*2.000000*E-01	2.491825	2.491825	4.768372E-07
*2.500000*E-01	2.648722	2.648721	7.152557E-07
*3.000000*E-01	2.822120	2.822119	9.536743E-07
*3.500000*E-01	3.013754	3.013753	1.192093E-06
*4.000000*E-01	3.225542	3.225541	1.192093E-06
*4.500000*E-01	3.459605	3.459603	1.668930E-06
*5.000001*E-01	3.718284	3.718282	2.145767E-06
*5.500001*E-01	4.004169	4.004167	2.384186E-06
*6.000001*E-01	4.320120	4.320117	2.861023E-06
*6.500001*E-01	4.669302	4.669297	4.291534E-06
*7.000001*E-01	5.055205	5.055201	4.291534E-06

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
$h = 0.05$			
7.500001E-01	5.481696	5.481690	5.722046E-06
8.000001E-01	5.953041	5.953034	6.675720E-06
8.500001E-01	6.473957	6.473949	7.629395E-06
9.000002E-01	7.049658	7.049649	9.059906E-06
9.500002E-01	7.685907	7.685897	1.001358E-05
1.000000	8.389071	8.389058	1.239777E-05

جدول (1)

من الجدول (1) نلاحظ أنه عندما $h = 0.2$ يتطابق الحلان العددي والفعلي في خمسة أرقام معنوية على الأكثر، وعندما $h = 0.1$ يتطابق الحلان في ستة أرقام معنوية على الأكثر، بينما عندما $h = 0.05$ يتطابق الحلان في سبعة أرقام معنوية على الأكثر.

3.2 خوارزمية رونج .كوتا من المرحلة السادسة

يمكن اشتقاق خوارزمية رونج – كوتا من المرحلة السادسة بنفس الأسلوب المستخدم في اشتقاق الخوارزمية السابقة. وستتم دراسة حالة خاصة من خوارزمية رونج —كوتا من المرحلة السادسة وهي طريقة رونج — كوتا — نيستروم[1]، وتعرف كالآتي:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & \\
\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{6}{25} & & & & \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{-12}{4} & \frac{15}{4} & & & \\
\frac{2}{3} & \frac{6}{81} & \frac{90}{81} & \frac{-50}{81} & \frac{8}{81} & & \\
\frac{4}{5} & \frac{6}{75} & \frac{36}{75} & \frac{10}{75} & \frac{8}{75} & 0 & \\
\hline
 & \frac{23}{192} & 0 & \frac{125}{192} & \frac{-81}{192} & 0 & \frac{125}{192}
\end{array}
$$

ولدراسة تأثير h على دقة الخطوة ندرس المثال التالي:

مثال 2

استخدم خوارزمية رونج —كوتا — نيستروم لحل المسألة:

$$y' = xe^{3x} - 2y \quad ; \quad y(0) = 0$$

حيث $h = 0.2\,, 0.1\,, 0.05$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

[1] انظر [8].

الحل:

النتائج تتضح من الجدول (2).

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
$h = 0.2$			
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2.000000E-01	2.680548E-02	2.681280E-02	7.323921E-06
4.000000E-01	1.507572E-01	1.507778E-01	2.065301E-05
6.000000E-01	4.959724E-01	4.960196E-01	4.720688E-05
8.000000E-01	1.330756	1.330857	1.009703E-04
1.000000	3.218890	3.219099	2.095699E-04
$h = 0.1$			
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.000000E-01	5.751952E-03	5.752054E-03	1.019798E-07
2.000000E-01	2.681257E-02	2.681280E-02	2.309680E-07
3.000000E-01	7.114412E-02	7.114454E-02	4.172325E-07
4.000000E-01	1.507772E-01	1.507778E-01	6.556511E-07
5.000000E-01	2.836155E-01	2.836165E-01	9.834766E-07
6.000000E-01	4.960181E-01	4.960196E-01	1.549721E-06
7.000000E-01	8.264787E-01	8.264810E-01	2.324581E-06
8.000001E-01	1.330854	1.330858	3.457069E-06
9.000001E-01	2.089770	2.089775	5.006790E-06
1.000000	3.219094	3.219101	7.152557E-06

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
$h = 0.05$			
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
5.000000E-02	1.338468E-03	1.338469E-03	1.629815E-09
1.000000E-01	5.752051E-03	5.752054E-03	3.259629E-09
1.500000E-01	1.394960E-02	1.394961E-02	6.519258E-09
2.000000E-01	2.681280E-02	2.681280E-02	7.450581E-09
2.500000E-01	4.543122E-02	4.543123E-02	7.450581E-09
3.000000E-01	7.114451E-02	7.114454E-02	2.235174E-08
3.500000E-01	1.055929E-01	1.055930E-01	2.980232E-08
4.000000E-01	1.507778E-01	1.507779E-01	4.470348E-08
4.500000E-01	2.091341E-01	2.091341E-01	5.960464E-08
5.000001E-01	2.836165E-01	2.836166E-01	8.940697E-08
5.500001E-01	3.778035E-01	3.778036E-01	1.192093E-07
6.000001E-01	4.960196E-01	4.960198E-01	1.490116E-07
6.500001E-01	6.434833E-01	6.434835E-01	1.788139E-07
7.000001E-01	8.264810E-01	8.264813E-01	2.384186E-07
7.500001E-01	1.052576	1.052577	3.576279E-07
8.000001E-01	1.330857	1.330858	4.768372E-07
8.500001E-01	1.672231	1.672232	4.768372E-07
9.000002E-01	2.089775	2.089776	4.768372E-07
9.500002E-01	2.599151	2.599152	4.768372E-07
1.000000	3.219101	3.219101	0.000000E+00

جدول (2)

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

من الجدول (2) نلاحظ أنه عندما $h = 0.2$ يتطابق الحلان العددي والفعلي في أربعة أرقام معنوية على الأكثر. وعندما $h = 0.1$ يتطابق الحلان في ستة أرقام معنوية على الأكثر. وعندما $h = 0.05$ يتطابق الحلان في سبعة أرقام معنوية على الأكثر. أي كلما قلت h كلما زادت دقة الحل.

4.2 خوارزمية رونج .كوتا من المرحلة السابعة

يمكن اشتقاق خوارزمية رونج –كوتا من المرحلة السابعة بنفس الأسلوب المستخدم في اشتقاق الخوارزميات السابقة. وستتم دراسة حالة خاصة من خوارزمية رونج –كوتا من المرحلة السابعة وهي طريقة رونج –كوتا – بوتشر[2]. وتعرف كالآتي:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & \frac{-1}{12} & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & \frac{18}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{-6}{16} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{9}{8} & 0 & \frac{-3}{8} & \frac{-6}{8} & \frac{4}{8} & & \\
1 & \frac{9}{44} & \frac{-36}{44} & \frac{63}{44} & \frac{72}{44} & \frac{-64}{44} & 0 & \\
\hline
 & \frac{11}{120} & 0 & \frac{81}{120} & \frac{81}{120} & \frac{-32}{120} & \frac{-32}{120} & \frac{11}{120}
\end{array}
$$

ولدراسة تأثير طول الخطوة h على دقة الحل ندرس المثال التالي.

[2] انظر [8].

مثال 3

أوجد حل المسألة:

$$y' = xe^{3x} - 2y \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad h = 0.25\,, 0.125\,, 0.0625$$

باستخدام خوارزمية رونج – كوتا – بوتشر على الفترة $0 \le x \le 1$.

الحل:

النتائج تتضح من الجدول (3).

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
$h = 0.25$			
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2.500000E-01	4.542729E-02	4.543123E-02	3.941357E-06
5.000000E-01	2.836035E-01	2.836165E-01	1.302361E-05
7.500000E-01	1.052536	1.052576	3.981590E-05
1.000000	3.218985	3.219099	1.139641E-04
$h = 0.125$			
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.250000E-01	9.327081E-03	9.327160E-03	7.916242E-08
2.500000E-01	4.543104E-02	4.543123E-02	1.862645E-07
3.750000E-01	1.267019E-01	1.267022E-01	3.427267E-07
5.000000E-01	2.836159E-01	2.836165E-01	6.258488E-07
6.250000E-01	5.657287E-01	5.657298E-01	1.072884E-06
7.500000E-01	1.052574	1.052576	1.907349E-06
8.750000E-01	1.870565	1.870569	3.099442E-06
1.000000	3.219094	3.219099	5.006790E-06
$h = 0.0625$			
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6.250000E-02	2.128543E-03	2.128544E-03	1.396984E-09
1.250000E-01	9.327156E-03	9.327160E-03	3.725290E-09
1.875000E-01	2.310393E-02	2.310393E-02	3.725290E-09

2.500000E-01	4.543122E-02	4.543123E-02	7.450581E-09
3.125000E-01	7.886621E-02	7.886622E-02	1.490116E-08
3.750000E-01	1.267022E-01	1.267022E-01	1.490116E-08
4.375000E-01	1.931584E-01	1.931584E-01	1.490116E-08
5.000000E-01	2.836165E-01	2.836165E-01	2.980232E-08
5.625000E-01	4.049174E-01	4.049174E-01	2.980232E-08
6.250000E-01	5.657298E-01	5.657298E-01	0.000000E+00
6.875000E-01	7.770104E-01	7.770105E-01	5.960464E-08
7.500000E-01	1.052576	1.052576	1.192093E-07
8.125000E-01	1.409815	1.409815	1.192093E-07
8.750000E-01	1.870568	1.870569	1.192093E-07
9.375000E-01	2.462230	2.462230	0.000000E+00
1.000000	3.219099	3.219099	0.000000E+00

جدول (3)

من الجدول (3) نلاحظ أنه عندما $h = 0.25$ يتطابق الحلان العددي والفعلي في أربعة أرقام معنوية على الأكثر، وعندما $h = 0.125$ يتطابق الحلان في ستة أرقام معنوية على الأكثر، وعندما $h = 0.0625$ يتطابق الحلان في سبعة أرقام معنوية على الأكثر.

أي أنه كلما قلت قيمة h كلما زادت دقة الحل.

5.2 الخلاصة

مما سبق نستنتج انه لا يمكن الحكم على أي من الخوارزميات التي من نفس المرحلة أنها أفضل من غيرها عند حل مسألة ما؛ لأن ذلك يعتمد على طبيعة المعادلة التفاضلية، وكذلك طول الخطوة يؤثر في دقة الحل ومرحلة الطريقة. خوارزميات رونج-كوتا ذات رتب عليا تتطلب العديد من الحسابات فمثلا لا يمكن الحصول على خوارزمية من المرحلة الخامسة والرتبة الخامسة، وبالتالي يجب إضافة مرحلتين للحصول على هذه الخوارزمية ومع هذا نلاحظ انه كلما قل طول الخطوة كانت النتائج أكثر دقة.

ملحق البرامج:

1. برنامج رونج_كوتا 5

```
PROGRAM RUKT5
REAL X,Y,H,K1,K2,K3,K4,K5
INTEGER I,N
F(X,Y)=-Y**2*SIN(X)
OPEN(5,FILE='RK5.DAT')
PRINT*,'X,Y,H,N'
READ(*,*) X,Y,H,N
DO I=1,N
Xnew=X+H
K1=F(X,Y)
K2=F(X+H/3,Y+H*K1/3)
K3=F(X+H/3,Y+H*(K1+K2)/6)
K4=F(X+H/2,Y+H*(K1+3*K3)/8)
K5=F(X+H,Y+H*(K1/2-3*K3/2+2*K4))
Ynew=Y+H*(K1+4*K4+K5)/6
Znew=Y+H*(K1+3*K3+4*K4+2*K5)/10
Z=1/(3-COS(Xnew))
WRITE(5,*) Xnew,Znew,Z,ABS(Znew-Z)
X=Xnew
Y=Znew
END DO
STOP
END
```

2. برنامج رونج_كوتا 6

```
PROGRAM RUKT6
REAL X,Y,H,K1,K2,K3,K4,K5,K6
INTEGER I,N
F(X,Y)=Y*X**2-Y
OPEN(6,FILE='RK63.DAT'')
PRINT*,'X,Y,H,N'
READ(*,*) X,Y,H,N
WRITE(6,*)X,Y,Y,Y-Y
DO I=1,N
Xnew=X+H
K1=F(X,Y)
K2=F(X+H/3,Y+H*K1/3)
K3=F(X+2*H/5,Y+H*(4*K1+6*K2)/25)
K4=F(X+H,Y+H*(K1-12*K2+15*K3)/4)
K5=F(X+2*H/3,Y+H*(6*K1+90*K2-50*K3+8*K4)/81)
K6=F(X+4*H/5,Y+H*(6*K1+36*K2+10*K3+8*K4)/75)
Ynew=Y+H*(23*K1+125*K3-81*K5+125*K6)/192
Z=EXP(Xnew**3/3-Xnew)
WRITE(6,*) Xnew,Ynew,Z,ABS(Ynew-Z)
X=Xnew
Y=Ynew
END DO
STOP
END
```

3. برنامج رونج_كوتا 7

```
PROGRAM RUKT7
REAL X,Y,H,K1,K2,K3,K4,K5,K6,K7
INTEGER I,N
F(X,Y)=-Y*SIN(X)
OPEN(7,FILE='RK73.DAT')
PRINT*,'X,Y,H,N'
READ(*,*) X,Y,H,N
WRITE(7,*)X,Y,Y,Y-Y
DO I=1,N
Xnew=X+H
K1=F(X,Y)
K2=F(X+H/3,Y+H*K1/3)
K3=F(X+2*H/3,Y+H*2*K2/3)
K4=F(X+H/3,Y+H*(K1+4*K2-K3)/12)
K5=F(X+H/2,Y+H*(18*K2-K1-3*K3-6*K4)/16)
K6=F(X+H/2,Y+H*(9*K2-3*K3-6*K4+4*K5)/8)
K7=F(X+H,Y+H*(9*K1-36*K2+63*K3+72*K4-64*K5)/44)
Ynew=Y+H*(11*K1+81*K3+81*K4-32*K5-32*K6+11*K7)/120
Z=1/(3-COS(Xnew))
WRITE(7,*) Xnew,Ynew,Z,ABS(Ynew-Z)
X=Xnew
Y=Ynew
END DO
STOP
END
```

المصادر والمراجع:

1. J. Douglas Faires, Richard L.Burden ، ترجمة د. رمضان محمد جهيمة ، د. كمال أبو القاسم أبو دية ، التحليل العددي ، منشورات Elga، 2001 .
2. د. فضيلة سعد محمد ، د. الرويعي النفاتي معمر ، *التحليل العددي للمهندسين* ، الطبعة الأولى. منشورات جامعة طرابلس —كلية الهندسة.
3. **د. الشقماني زينب علي ا. ارفيدة سمية رجب ، اشتقاق خوارزميات رونج _كوتا**، الندوة الثالثة حول نظريات وتطبيقات العلوم الاساسية والحيوية،32-44 3 سبتمبر 2016.

4. J.D. Lambert, Numerical Methods For Ordinary Differential Systems. Wiley 1991.
5. John H.Mathews, Kurtis D.Fink, Numerical Methods Using Mathlab, 4th Edition Prenctice, Hall Inc, 2004.
6. Ken Wong, Solving Ordinary Differentia equations with Runge-Kutta methods, February 5, 2002.
7. Curtis F.Gerald, Patrick O.Wheatley, Applied Numerical Analysis, 6th Edition, Addison Wesley Longman 1999.
8. Bratislar Tasi'c, Numerical methods for solving ODE flow, Endhoven university, 2004.